

## Ключи 10 класс

**10.1** Решите уравнение  $(x^2 + 4x)^2 + (x + 2)^2 - 10 = 0$ .

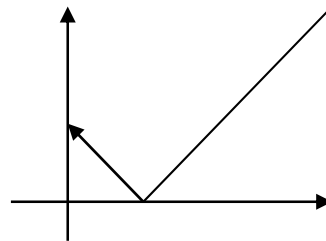
Раскроем вторые скобки и сделаем замену  $t = x^2 + 4x$ , после чего получим уравнение  $t^2 + t - 6 = 0$ , корни которого  $t_1 = 2$  и  $t_2 = -3$ . Решая теперь уравнения  $x^2 + 4x = 2$  и  $x^2 + 4x = -3$ , получим 4 корня исходного уравнения:  $-1, -3, -2 \pm \sqrt{6}$ .

**10.2** Докажите, что  $(3a + 5b + 7)^5(5a + 3b + 6)^{10}$  делится на 32 при любых целых  $a$  и  $b$ .

Если числа  $a$  и  $b$  оба четные или оба нечетные, то  $5a + 3b + 6$  делится на 2, а потому десятая степень этого выражения делится на 32. Если же  $a$  и  $b$  разной четности, то четным является число  $3a + 5b + 7$ , то есть его пятая степень делится на 32.

**10.3** Постройте график функции  $y = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2}}{x} - 2|x| + \frac{x^3}{|x|}}$ .

При  $x = 0$  функция не определена. Если  $x > 0$ , то  $y = \sqrt{1 - 2x + x^2} = |x - 1|$ . Если  $x < 0$ , то  $y = \sqrt{-1 + 2x - x^2} = \sqrt{-(x - 1)^2}$ , то есть при отрицательных значениях  $x$  функция не определена.



**10.4** Найдите площадь равнобедренного треугольника  $MNP$ , если высота, проведенная к боковой стороне  $NP$ , равна 6, а высота, проведенная к основанию  $MP$ , равна 5.

Пусть  $x$  – основание. Тогда из теоремы Пифагора  $NP = \sqrt{25 + \frac{x^2}{4}}$ . Запишем площадь двумя способами.  $S = 5 \cdot x / 2$ ,  $S = (6 \cdot \sqrt{25 + \frac{x^2}{4}}) / 2$ , получим уравнение

$$6 \cdot \sqrt{25 + \frac{x^2}{4}} = 5 \cdot x, \quad x = 7,5$$

Искомая площадь равна  $S = (5 \cdot 7,5) / 2 = \underline{\underline{18,75}}$

**10.5** Докажите, что среди чисел вида  $111\dots 11$  найдется число, которое делится на 113.

Рассмотрим 113 чисел  $1111, 11111, \dots, 111\dots 11$

Если ни одно из этих чисел не делится на 113, то среди них найдутся по крайней мере два, дающие при делении на 113 одинаковые остатки. Разность двух этих чисел, имеющая вид  $111\dots 11000\dots 00$  ( $n$  единиц,  $m$  нулей), делится на 113. Отсюда следует, что число, состоящее из  $n$  единиц, тоже делится на 113 (т.к.  $10^m$  на 113 не делится.).