

10 класс

1. Что больше: $2018^{2018} + 2016^{2016}$ или $2018^{2016} + 2016^{2018}$?

Решение.

Преобразуем разность левой и правой частей:

$$2018^{2018} + 2016^{2016} - 2018^{2016} - 2016^{2018} = (2018^{2018} - 2018^{2016}) - (2016^{2018} - 2016^{2016}) = 2018^{2016} (2018^2 - 1) - 2016^{2016} (2016^2 - 1) > 0, \text{ т.к.}$$

$$2018^{2016} > 2016^{2016}, \quad 2018^2 - 1 > 2016^2 - 1.$$

Следовательно, уменьшаемое больше вычитаемого, то есть разность положительна. Значит, $2018^{2018} + 2016^{2016} > 2018^{2016} + 2016^{2018}$.

2. Пусть автомобиль проехал S км со скоростью 60 км/ч, S со скоростью 90 км/ч, S км со скоростью 45 км/ч. Всего автомобиль проехал $3S$ км и затратил на это $S/60 + S/90 + S/45 = 9S/180 = S/20$ (часов). Средняя скорость $3S/(S/20) = 60$ км/ч

Ответ: 60 км/ч

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72, \\ (y+z)(x+y+z)=120, \\ (x+z)(x+y+z)=96. \end{cases}$$

Решение.

Сложив все три уравнения системы, получим уравнение $(x+y+z)(2x+2y+2z)=288$, из которого найдем $x+y+z=12$ или $x+y+z=-12$.

Подставляя вместо $x+y+z$ числа 12 и -12, получим в первом случае: $x=2, y=4, z=6$, а во втором: $x=-2, y=-4, z=-6$.

Ответ: $(2; 4; 6), (-2; -4; -6)$.

4. В некоторой трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований трапеции, а угол между диагоналями равен 60° . Является ли трапеция равнобедренной?

Решение.

Рассмотрим трапецию $ABCD$: $AC = a + b$, где $BC = a$; $AD = b$.

Если $\angle BOC = 60^\circ$, то $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – равносторонние, $BD = AC = a + b$,

$\triangle ACD = \triangle BAD \Rightarrow AB = CD$, трапеция $ABCD$ – равнобедренная.

Ответ: да.

5 Согласно теореме Виета, если t_1 и t_2 – корни данного уравнения, то $b = -t_1 - t_2$, $c = t_1 t_2$. Поэтому новое уравнение имеет вид $x^2 - (2t_1 + t_2)x + 2t_1 t_2 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $(2t_1 - t_2)^2 \geq 0$. Значит, у этого уравнения есть корень.